5. Функционалы.

Все приводимые ниже определения и факты относятся к функционалам, определённым в евклидовых пространствах.

Определение. *Последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *элементов евклидового пространства* $\mathbb{H}$ *с введённым на нем скалярным произведением* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ *называется* **слабо сходящейся** *к элементу* f *этого пространства, если* $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle f_n,h\rangle_{\mathbb{H}}=\langle f,h\rangle_{\mathbb{H}}\ \forall h\in\mathbb{H}$.

Замечание. *Понятие слабой сходимости является содержательным только в бесконечномерных пространствах. В конечномерных пространствах слабая и сильная сходимость эквивалентны.*

+ **Замечание.** *В бесконечномерном евклидовом пространстве из сильной сходимости последовательности вытекает слабая, обратное неверно: любая последовательность, представляющая собой ортонормированный базис этого пространства, не является сильно сходящейся, но сходится слабо к его нулевому элементу. Доказать это утверждение очень просто: заметим, что по неравенству Коши-Буняковского*

$$|\langle u_n,h\rangle_{\mathbb{H}}-\langle u_0,h\rangle_{\mathbb{H}}|=|\langle u_n-u_0,h\rangle_{\mathbb{H}}|\leqslant||u_n-u_0||_{\mathbb{H}}\cdot||h||_{\mathbb{H}}\ \forall h\in\mathbb{H}.$$

Поэтому, если произвольная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *сильно сходится к элементу* u_0, *то* $\lim\limits_{n\to+\infty}||u_n-u_0||_{\mathbb{H}}=0$, *из чего вытекает* $\lim\limits_{n\to+\infty}(\langle u_n,h\rangle_{\mathbb{H}}-\langle u_0,h\rangle_{\mathbb{H}})=0$.

С другой стороны, рассматривая произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *мы имеем*

$$||e_k-e_m||_{\mathbb{H}}^2=||e_k||_{\mathbb{H}}^2-2\langle e_k,e_m\rangle_{\mathbb{H}}+||e_m||_{\mathbb{H}}^2=2\ \forall k,m\in\mathbb{N},k\neq m,$$

то есть последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *не является фундаментальной, и, как следствие, не может сильно сходиться ни к одному элементу* u_0 *пространства* $\mathbb{H}$. *Тем не менее, если рассмотреть произвольный элемент* h *пространства* $\mathbb{H}$, *то, по неравенству Бесселя,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\langle e_n,h\rangle_{\mathbb{H}}^2\leqslant||h||_{\mathbb{H}}^2.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\langle e_n,h\rangle_{\mathbb{H}}^2$ *сходится, поэтому* $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle e_n,h\rangle_{\mathbb{H}}=0=\langle\Theta_{\mathbb{H}},h\rangle_{\mathbb{H}}\ \forall h\in\mathbb{H}$.

Определение. *Функционал* $J(u):\mathbb{H}\to\mathbb{R}^1$ *называется* **слабо непрерывным** / *слабо полунепрерывным снизу* / { *слабо полунепрерывным сверху* } *в точке* u_0, *если для любой* слабо *сходящейся к* u_0 *последовательности* $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *выполнено*

$$\lim_{n\to+\infty}J(u_n)=J(u_0)\quad[\varliminf_{n\to+\infty}J(u_n)\geqslant J(u_0)]\quad\{\varlimsup_{n\to+\infty}J(u_n)\leqslant J(u_0)\}.$$

] в конечномерном R^n ⟼ если $m=n$, то $B=\|h-\sum\limits_{k=1}^{n}\langle h,e_k\rangle e_k\|^2$, $\|h\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle h,e_k\rangle^2$

или бесконечномерном H-евкл. ⟼ о/н сист. $\{e_n\}$ наз. замкнутой, если $\forall h\in H$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k^2=\|h\|^2$ {рав-во Парсеваля}

$\{e_1,e_2,\dots,e_n,\dots\}$ - о/н базис.

для $\forall h\in H$ рассм. $\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k$, где m-произв. конечное; $\langle h,e_k\rangle = h_k$

$0\leqslant\|h-\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k\|^2=\|h\|^2-2\langle h,\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k\rangle+\|\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k\|^2=\|h\|^2-\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle^2$ $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle h,e_k\rangle^2\leqslant\|h\|^2$ сх-ся.

$-2\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle^2=-2\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle\langle h,e_k\rangle$

$\langle\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k,\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle e_k\rangle=\sum\limits_{k=1}^{m}\langle h,e_k\rangle^2$

Теорема: В сепараб. евкл. H для $\forall$ о/н $\{e_n\}$ полна $\Leftrightarrow$ замкнута

сист. $\{e_n\}$ наз. полной в H, если $\forall h\in H$ можно сколь угодно точно аппрокс-ть л.к. из $\{e_n\}$ $\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k$

т.е. л.к. $\{e_n\}$ всюду плотны в H

Замечание. *Из слабой непрерывности (полунепрерывности снизу или сверху) вытекает сильная, обратное для* бесконечномерного *евклидового пространства неверно. В качестве примера сильно непрерывного, но не слабо непрерывного функционала можно привести функционал* $J(u) = ||Au - f||^2_{\mathbb{F}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$, *свойства которого рассматриваются ниже.*

Определение. *Функционал* $J(h) : H \to \mathbb{R}^1$ *называется* **выпуклым** *[вогнутым] на множестве* H, *если выполнено условие*

выпуклой

$$J(\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2) \leqslant [\geqslant] \alpha J(h_1) + (1-\alpha)J(h_2) \ \forall h_1, h_2 \in H, \alpha \in [0,1].$$

Теорема. *В гильбертовом пространстве* $\mathbb{H}$ *из выпуклости и полунепрерывности снизу функционала на некотором* (выпуклой) *множестве вытекает его слабая полунепрерывность* (снизу) *на этом множестве.*

см. оборот 0. H,F-лин.норм.пр-ва A:H→F линейный оператор. Тогда A-ограничен ⟺ A-непрерывен.

Свойства простейших функционалов:

+1 Линейный функционал $\mathbf{J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}}}$, $c \in \mathbb{H}$. Он является (выпуклым явл.) слабо непрерывным в любой точке u_0 пространства $\mathbb{H}$. Действительно, если рассмотреть любую слабо сходящуюся к u_0 последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle h, u_n\rangle_{\mathbb{H}} = \langle h, u_0\rangle_{\mathbb{H}}$ $\forall h \in \mathbb{H}$. Полагая $h = c$ в этом соотношении, имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle c, u_n\rangle_{\mathbb{H}} = \langle c, u_0\rangle_{\mathbb{H}}$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = J(u_0)$. Как следствие этого факта, линейный функционал также является слабо полунепрепрерывным снизу, непрерывным и полунепрерывным снизу на всем пространстве $\mathbb{H}$.

+2. Квадратичный функционал $\mathbf{J(u) = ||Au - f||^2_{\mathbb{F}}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{F})$, $f \in \mathbb{F}$. Его (есть) непрерывность, и, как следствие, полунепрерывность снизу (есть) в произвольной точке u_0 пространства $\mathbb{H}$, вытекает из такой оценки:

$$|J(u_n) - J(u_0)| = \big|||Au_n - f||^2_{\mathbb{F}} - ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}}\big| = \big|||A(u_n - u_0) + Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} - ||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}}\big| =$$
$$= \big|||A(u_n - u_0)||^2_{\mathbb{F}} + 2\langle A(u_n - u_0), Au_0 - f\rangle_{\mathbb{F}}\big| \leqslant ||A(u_n - u_0)||^2_{\mathbb{F}} + 2|\langle A(u_n - u_0), Au_0 - f\rangle_{\mathbb{F}}| \leqslant$$
$$\leqslant ||A||^2 \cdot ||u_n - u_0||^2_{\mathbb{H}} + 2||A|| \cdot ||u_n - u_0||_{\mathbb{H}} \cdot ||Au_0 - f||_{\mathbb{F}}$$

Стало быть, если произвольная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сильно сходится к точке u_0, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n - u_0||_{\mathbb{H}} = 0$, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) - J(u_0) = 0$.

нет Слабая непрерывность этого функционала в произвольной точке u_0 пространства $\mathbb{H}$, вообще говоря, отсутствует. Для обоснования этого факта рассмотрим последовательность $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$, представляющую собой ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$. Тогда последовательность $u_n = u_0 + e_n$ слабо сходится к точке u_0 (, но не сильно). Воспользуемся таким формальным соотношением:

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \lim_{n\to+\infty} ||A(u_0 + e_n) - f||^2_{\mathbb{F}} = \lim_{n\to+\infty} \left(||Au_0 - f||^2_{\mathbb{F}} + 2\langle Ae_n, Au_0 - f\rangle_{\mathbb{F}} + ||Ae_n||^2_{\mathbb{F}}\right) =$$
$$= J(u_0) + \lim_{n\to+\infty} \left(2\langle e_n, A^*(Au_0 - f)\rangle_{\mathbb{H}} + ||Ae_n||^2_{\mathbb{F}}\right) = J(u_0) + \lim_{n\to+\infty} ||Ae_n||^2_{\mathbb{F}},$$

в силу того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle e_n, A^*(Au_0 - f)\rangle_{\mathbb{H}} = 0$. Если оператор A, к примеру, является единичным, то очевидно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) = J(u_0) + 1 \neq J(u_0)$, то есть слабой непрерывности {H=F}

0. •) пусть лин. опер. $A: \underset{\text{норм.}}{H \to F}$ [redacted] 7.1

если A-непр. в т. θ $\Leftrightarrow$ для $\forall \{u_k\} \xrightarrow{H} \theta \Longrightarrow \|Au_k\|_F \to 0$, т.е. $\|u_k\|_H \to 0$ $\Longrightarrow$ Тогда для $\forall u_0 \in H$ рассм. $\forall \{\tilde{u}_k\} \xrightarrow{H} u_0$, т.е. $\|\tilde{u}_k - u_0\|_H \to 0$,
обозначим $\{u_k\} = \{\tilde{u}_k - u_0\} \xrightarrow{H} \theta$, а тогда
$\|Au_k\|_F = \|A\tilde{u}_k - Au_0\|_F \to 0$ т.е. A-непр. в т. u_0

если A-непр. в т. u_0 $\Leftrightarrow$ для $\forall \{\tilde{u}_k\} \xrightarrow{H} u_0 \Longrightarrow \|A\tilde{u}_k - Au_0\|_F \to 0$, т.е. $\|\tilde{u}_k - u_0\|_H \to 0$ $\Longrightarrow$ Тогда для $\forall \{u_k\} \xrightarrow{H} \theta$ т.е. $\|u_k\|_H \to 0$,
обозначим $\tilde{u}_k = u_k + u_0$ $\|\tilde{u}_k - u_0\|_H \to 0$, т.е. $\{\tilde{u}_k\} \xrightarrow[H]{} u_0$
а тогда $\|A\tilde{u}_k - Au_0\|_F = \|Au_k\|_F \to 0$ т.е. A-непр. в т. θ

$\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{если A непр. в т. } u_0 \Longrightarrow \text{A непр. в т. } \theta \Longrightarrow \text{A непр. в } \forall \text{т. } u \\ \text{если A разр. в т. } u_0 \underset{\text{от прот.}}{\Longrightarrow} \text{A разр. в т. } \theta \underset{\text{от прот.}}{\Longrightarrow} \text{A разр. в } \forall \text{т. } u \end{cases}$

Т.о. лин. опер. A в норм. пр-ах непр. или разрывен сразу во всем H

••) пусть $A \in \mathcal{L}(\underset{\text{норм}}{H \to F})$ {A-лин. и огр.}

$\|Au - Au_0\|_F \le \underset{\text{const}}{\|A\|} \cdot \|u - u_0\|_H \xrightarrow[\|u-u_0\|_H \to 0]{} 0$ т.е. A непр. в $\forall$ т. u_0

$\|Au - Av\|_F \le \|A\| \cdot \|u - v\|_H \xrightarrow[\|u-v\|_H \to 0]{} 0$ т.е. A равном. непр. на H

•••) пусть A-лин. и непр. $A: \underset{\text{норм.}}{H \to F}$

предпол. A-неогр-й $\Longrightarrow$ $\exists$ такая $\{u_k\}$, что $\dfrac{\|Au_k\|_F}{\|u_k\|_H} \to +\infty \Leftrightarrow \Big\|A\underbrace{\Big(\dfrac{u_k}{\|u_k\|_H}\Big)}_{\tilde{u}_k \in S}\Big\|_F \to +\infty$ $\begin{cases} \|\tilde{u}_k\|_H = 1 \\ \|A\tilde{u}_k\|_F \to +\infty \end{cases}$

Тогда рассм. $v_k = \dfrac{\tilde{u}_k}{\sqrt{\|A\tilde{u}_k\|_F}}$: $\begin{cases} \|v_k\|_H = \dfrac{\|\tilde{u}_k\|_H}{\sqrt{\|A\tilde{u}_k\|_F}} \to 0, \text{ т.е. } \{v_k\} \xrightarrow{H} \theta \\ \|Av_k\|_F = \dfrac{\|A\tilde{u}_k\|_F}{\sqrt{\|A\tilde{u}_k\|_F}} \to +\infty, \text{ т.е. } \{Av_k\} \overset{F}{\not\to} \theta \end{cases}$ т.е. A разрывен в т. θ, а значит и везде в H

Пришли к противоречию, значит A-огран. в H

$J(\alpha u+(1-\alpha)v) - \alpha J(u) - (1-\alpha)J(v) = \|A(\alpha u+(1-\alpha)v) - f\|^2_F - \alpha\|Au-f\|^2_F - (1-\alpha)\|Av-f\|^2_F =$

$= \|\alpha Au + (1-\alpha)Av - \alpha f - (1-\alpha)f\|^2_F - \alpha\|Au-f\|^2_F - (1-\alpha)\|Av-f\|^2_F =$

$= (\alpha^2-\alpha)\|Au-f\|^2_F + (\alpha^2-\alpha)\|Av-f\|^2_F - (\alpha^2-\alpha)2\langle Au-f, Av-f\rangle_F =$

$= \alpha(\alpha-1)\langle (Au-f)-(Av-f), (Au-f)-(Av-f)\rangle_F = \alpha(\alpha-1)\langle A(u-v), A(u-v)\rangle_F \le 0$ ч.т.д.

нет. Если же он нулевой, то слабая непрерывность есть. Также может оказаться, что предел $\lim\limits_{n\to+\infty} ||Ae_n||^2_F$ вовсе не существует, что, разумеется, приведет нас к отсутствию слабой непрерывности этого функционала.

есть слабо полунепрерывным снизу в произвольной точке u_0 пространства $\mathbb{H}$. Выполнение этого свойства можно уставить с помощью приведенной выше теоремы, проверив с помощью определения есть выпуклость этого функционала на всем пространстве $\mathbb{H}$.

+ 3. Квадратичный функционал $\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{Au}, \mathbf{u}\rangle_{\mathbb{H}}$, $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$. Его есть непрерывность, и, как следствие, полунепрерывность снизу в есть произвольной точке u_0 пространства $\mathbb{H}$, обосновывается по аналогии с предыдущим функционалом:

$$|J(u_n)-J(u_0)| = |\langle Au_n, u_n\rangle_{\mathbb{H}} - \langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}}| = |\langle A(u_n-u_0)+Au_0, (u_n-u_0)+u_0\rangle_{\mathbb{H}} - \langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}}| =$$

$$= |\langle A(u_n-u_0), (u_n-u_0)\rangle_{\mathbb{H}} + \langle A(u_n-u_0), u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle u_n-u_0, Au_0\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant$$

$$\leqslant ||A|| \cdot ||u_n-u_0||^2_{\mathbb{H}} + 2||A|| \cdot ||u_n-u_0||_{\mathbb{H}} \cdot ||u_0||_{\mathbb{H}}.$$

Поэтому, если произвольная последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ сильно сходится к точке u_0, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} ||u_n-u_0||_{\mathbb{H}} = 0$, то и $\lim\limits_{n\to+\infty} J(u_n) - J(u_0) = 0$.

Для ответа на вопрос, является ли этот функционал слабо непрерывным или слабо полунепрерывным снизу в произвольной точке u_0 пространства $\mathbb{H}$, опять-таки рассмотрим последовательность $u_n = u_0 + e_n$, слабо (, но не сильно) сходящуюся к точке u_0, и запишем формальное соотношение:

$$\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \langle A(u_0+e_n), u_0+e_n\rangle_{\mathbb{H}} = \lim_{n\to+\infty} (\langle Au_0, u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Au_0, e_n\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Ae_n, u_0\rangle_{\mathbb{H}} +$$

$$+ \langle Ae_n, e_n\rangle_{\mathbb{H}}) = J(u_0) + \lim_{n\to+\infty} (\langle e_n, Au_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle e_n, A^*u_0\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Ae_n, e_n\rangle_{\mathbb{H}}) = J(u_0) + \lim_{n\to+\infty} \langle Ae_n, e_n\rangle_{\mathbb{H}},$$

в силу того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle e_n, Au_0\rangle_{\mathbb{H}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle e_n, A^*u_0\rangle_{\mathbb{H}} = 0$. Видно, что, вообще говоря, ни нет слабой непрерывности, ни слабой полунепрерывности снизу ожидать не приходится, поскольку выражение $\langle Ae_n, e_n\rangle_{\mathbb{H}}$ может, например, нет стремиться к отрицательному числу при $n \to +\infty$. $\{A = \pm E\}$

Тем не менее, некие выводы можно сделать, исследовав этот функционал на выпуклость. Рассмотрим две произвольные точки u и v пространства $\mathbb{H}$ и любое действительное число $\alpha \in [0,1]$:

$$\alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - J(\alpha u + (1-\alpha)v) =$$

$$= \alpha\langle Au, u\rangle_{\mathbb{H}} + (1-\alpha)\langle Av, v\rangle_{\mathbb{H}} - \langle \alpha Au + (1-\alpha)Av, \alpha u + (1-\alpha)v\rangle_{\mathbb{H}} =$$

$$= (\alpha-\alpha^2)\langle Au, u\rangle_{\mathbb{H}} + (\alpha-\alpha^2)\langle Av, v\rangle_{\mathbb{H}} - (\alpha-\alpha^2)\langle Au, v\rangle_{\mathbb{H}} - (\alpha-\alpha^2)\langle u, Av\rangle_{\mathbb{H}} =$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left(\langle Au, u-v\rangle_{\mathbb{H}} + \langle Av, v-u\rangle_{\mathbb{H}}\right) = \alpha(1-\alpha)\langle A(u-v), u-v\rangle_{\mathbb{H}}.$$

Чтобы рассматриваемый функционал был выпуклым на всем пространстве $\mathbb{H}$, необходимо и дост., чтобы правая часть полученного неравенства была неотрицательной. Это будет выполнено тогда и только тогда, когда оператор A является неотрицательно определенным на всем пространстве $\mathbb{H}$.

① При проверке $J(u) = \|Au\|^2$ на сл. непр-ть в $\forall u_0$ — Доп. 8.1 —

Для $\forall u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0 \Leftrightarrow \langle u_n - u_0, h\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$J(u_n) - J(u_0) = J\big(u_0 + (u_n - u_0)\big) - J(u_0) = \|A(u_0 + u_n - u_0)\|^2 - \|Au_0\|^2 =$$

$$= \langle 2A(u_n - u_0), Au_0\rangle + \|A(\underbrace{u_n - u_0}_{\overset{\|}{v_n}\text{ - обозн.}})\|^2 \xrightarrow[u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0]{?} 0 \iff \|Av_n\|^2 \xrightarrow{?} 0 \quad \forall v_n \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$$

$$\langle 2A^* Au_0, u_n - u_0\rangle \xrightarrow[u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0]{} 0$$

---

② Для $J(u) = \langle Au, u\rangle$ — " —

$$J(u_n) - J(u_0) = \langle A(u_0 + (u_n - u_0)), u_0 + (u_n - u_0)\rangle - \langle Au_0, u_0\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle A(u_n - u_0), u_0\rangle}_{\langle A^* u_0, u_n - u_0\rangle \to 0} + \underbrace{\langle Au_0, u_n - u_0\rangle}_{\to 0} + \langle A(\underbrace{u_n - u_0}_{\overset{\|}{v_n}\text{ обозн.}}), u_n - u_0\rangle \xrightarrow[u_n \xrightarrow{\text{сл.}} u_0]{?} 0$$

$$\iff \langle Av_n, v_n\rangle \xrightarrow{?} 0 \quad \forall v_n \xrightarrow{\text{сл.}} \theta$$

Решения некоторых задач (в т.ч. домашних):

— Доп. 8.4 —

① на выпуклость по определению

i) $y=x^2$ выпукла: $(\alpha a+(1-\alpha)b)^2 \overset{?}{\le} \alpha a^2+(1-\alpha)b^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha)a^2+2\alpha(1-\alpha)ab+\alpha(\alpha-1)b^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)(a-b)^2\le 0$, что верно $\forall\alpha\in[0,1]$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

ii) $y=x^4$ тоже:

$$(\alpha a+(1-\alpha))^4=\Big(\underbrace{(\alpha a+(1-\alpha)b)^2}_{\le\alpha a^2+(1-\alpha)b^2}\Big)^2\le(\alpha \underbrace{a^2}_{a_1}+(1-\alpha)\underbrace{b^2}_{b_1})^2\le \alpha a_1^2+(1-\alpha)b_1^2=\alpha a^4+(1-\alpha)b^4$$

{но проще по теореме: $x^4=(x^2)^2$, $f(x)=g(x)=x^2$ – вып., при $x\ge 0$ неубывает.}

iii) $y=\frac{1}{x}$, $x>0$ выпукла:

$$\frac{1}{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}\overset{?}{\le}\frac{\lambda}{x_1}+\frac{1-\lambda}{x_2}\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}-\frac{\lambda}{x_1}-\frac{1-\lambda}{x_2}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1x_2-\lambda^2x_1x_2-\lambda(1-\lambda)x_2^2-\lambda(1-\lambda)x_1^2-(1-\lambda)^2x_1x_2}{\underbrace{x_1x_2(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)}_{>0}}=\frac{-\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2}{x_1x_2(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)}\le 0,$$

что верно $\forall\lambda\in[0,1]$, $\forall x_1,x_2>0$.

iiii) $y=1/x^2$, $x>0$ тоже: $\Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}}_{>0}\Big)^2\le\Big(\underbrace{\frac{\lambda}{x_1}+\frac{1-\lambda}{x_2}}_{>0}\Big)^2$, т.к. $y=1/x$ при $x>0$ выпукла,

$\Rightarrow\Big(\lambda\underbrace{\frac{1}{x_1}}_{a}+(1-\lambda)\underbrace{\frac{1}{x_2}}_{b}\Big)^2\le\lambda a^2+(1-\lambda)b^2=\frac{\lambda}{x_1^2}+\frac{1-\lambda}{x_2^2}$, ч.т.д.

т.к. $y=x^2$ выпукла

Теорема: $F(x)=f(g(x))$, где $g: H\to\mathbb{R}^1$, $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$; 1) $g(x)$ – выпукла на U – выпуклом, 2) на выпуклом $V\supseteq\{y: y=g(x), x\in U\}$ $f(y)$ выпукла и неубывает.
Тогда $F(x)$ выпукла на U.

Д-во: $F(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(\underbrace{g(\lambda x+(1-\lambda)y)}_{\le\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)})\le f(\lambda\underbrace{g(x)}_{\in V}+(1-\lambda)\underbrace{g(y)}_{\in V})\le\lambda f(g(x))+(1-\lambda)f(g(y))=$
$=\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)$, ч.т.д.

---

② $J_1(u)=\left(\int_a^b u(t)dt\right)^4$ в $L^2[a,b]$: вып-ть:

$$J_1(\alpha u+(1-\alpha)v)=\left(\int_a^b\alpha u(t)+(1-\alpha)v(t)dt\right)^4=\Big(\alpha\underbrace{\int_a^b u\,dt}_{u_1}+(1-\alpha)\underbrace{\int_a^b v\,dt}_{v_1}\Big)^4\le$$
$$\le\alpha\left(\int_a^b u(t)dt\right)^4+(1-\alpha)\left(\int_a^b v(t)dt\right)^4\quad\forall\alpha\in[0,1],\ \forall u,v\in L^2[a,b]$$

Лемма: $F(x)=f(g(x))$, где $g: H\to\mathbb{R}^1$, $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$;
$g(x)$ слабо непрерывна на U, $f(y)$ непрерывна на $V=\{y: y=g(x), x\in U\}$. Тогда $F(x)$ слабо непрерывна на U.

Д-во: (очевидное) пусть $\{x_n\}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}}x_0\Rightarrow\{g(x_n)\}\xrightarrow[n\to\infty]{}g(x_0)\Rightarrow\{f(g(x_n))\}\xrightarrow[n\to\infty]{}f(g(x_0))$.

$\Rightarrow J_1(u)=\Big(\underbrace{\langle u,1\rangle_{L^2[a,b]}}_{g(u)\text{ – слабо непр.}}\Big)^4$, $f(t)=t^4$ – непр. $\Rightarrow J_1(u)$ – слабо непр.

$J_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x_{2n-1}}{2n-1}$: $J_2(x)=\langle c,x\rangle_{l_2}$, где $c=(1,0,\frac{1}{3},0,\ldots)\in l_2\Rightarrow J_2(x)$ вып. и слабо непр. в l_2.

$\tilde{J}_2(x)=\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x_{2n}}{2n-1}\right)^2$: Применить Лемму $\Rightarrow$ слабо непр. в l_2. Вып-ть в l_2 по опр-ю.

$J_3(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2$: $\quad J_3(x)=\|Ax\|^2_{\ell_2}$, где $A\in\mathcal{L}(\ell_2\to\ell_2)$: **-Доп 8.4.1-**

$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,\dots)\xrightarrow{A} Ax=(x_1,0,x_3,0,\dots)$

•) очевидно, что для $\forall x\in\ell_2$ $\; Ax\in\ell_2$.

••) A линейный, т.к. $A(\alpha x+\beta y)=(\alpha x_1+\beta y_1,0,\alpha x_3+\beta y_3,0,\dots)=\alpha Ax+\beta Ay$.

•••) A ограниченный (очевидно), т.к. $\|Ax\|^2_{\ell_2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2_{2n-1}\le\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n^2=\|x\|^2$.

$\Rightarrow$ для J_3 спр-во все, что спр-во для $J(u)=\|Au-f\|^2_F$, $f\in F$, $A\in\mathcal{L}(H\to F)$, а именно $J_3(x)$ – вып-й, непр-й, п/непр. снизу, слабо п/непр. снизу в ℓ_2.

! При этом нельзя без непосредственной проверки утв-ть отсутствие слабой непр-ти $J_3(x)$ в $\forall$ т. x_0. !

$J_3(x)$ не явл. слабо непр. в $\forall$ т. x_0: для $\forall x_0$ рассм. $x_k=x_0+e_{2k+1}$, $\{e_k\}$-ОНБ.

$\{x_k\}\xrightarrow[k\to+\infty]{сл.}x_0$, однако $\lim\limits_{k\to+\infty}J_3(x_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}\|A(x_0+e_{2k+1})\|^2_{\ell_2}=\lim\limits_{k\to+\infty}\Big[\underbrace{\|Ax_0\|^2_{\ell_2}}_{J_3(x_0)}+\overbrace{\|Ae_{2k+1}\|^2_{\ell_2}}^{1}+\underbrace{2\langle e_{2k+1},A^*Ax_0\rangle}_{\to 0}\Big]=$

$= J_3(x_0)+1\ne J_3(x_0)$.

$\tilde J_3(x)=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2_{2n-1}}$: $\quad \tilde J_3(x)=\|Ax\|_{\ell_2}$, где A — как для $J_3(x)$.

$\tilde J_3(x)$ непрерывна в ℓ_2: для $\forall x_0$ рассм. $\{x_k\}$: $\|x_k-x_0\|_{\ell_2}\to0$, тогда

$\big|\|Ax_k\|-\|Ax_0\|\big|\le\|Ax_k-Ax_0\|\le\underbrace{\|A\|}_{const}\cdot\underbrace{\|x_k-x_0\|}_{\to0}\to0 \quad \Big\{\big|\|a\|-\|b\|\big|\le\|a-b\|\Big\}$

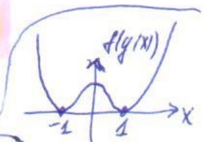
$\tilde J_3(x)$ выпукла в ℓ_2: по определению $\tilde J_3(\alpha x+(1-\alpha)y)=\|A(\alpha x+(1-\alpha)y)\|_{\ell_2}=\|\alpha Ax+(1-\alpha)Ay\|_{\ell_2}\le$

(исп-ся лин-ть A и вып-ть $\|\cdot\|$) $\quad \le\alpha\|Ax\|_{\ell_2}+(1-\alpha)\|Ay\|_{\ell_2}$

$\Rightarrow$ $\tilde J_3(x)$ слабо п/непр. снизу в ℓ_2 как одновременно выпуклая и п/непр. снизу.

$\tilde J_3(x)$ не явл. слабо непр. в $\forall$ т. x_0: (аналогично $J_3(x)$)

для $\{x_k\}\xrightarrow[k\to+\infty]{сл.}x_0$ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty}\tilde J_3(x_k)=\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt{J_3(x_k)}=\sqrt{J_3(x_0)+1}\ne\tilde J_3(x_0)$.



Итак, достаточным условием слабой полунепрерывности снизу этого функционала на всем пространстве $\mathbb{H}$ является неотрицательная определенность оператора A.

Задачи: +1.1 Является ли выпуклой суперпозиция выпуклых ф-ций? Нет: $f(x)=x^2$ (вып.) $g(x)=x^2-1$, но $f(g(x))=(x^2-1)^2=(x+1)^2(x-1)^2$ — невып.

+ 1. Пользуясь непосредственно определением выпуклости, доказать, что функция $y = x^4$ выпукла на всей числовой прямой, а функция $y = 1/x^2$ выпукла на множестве $(0, +\infty)$. д.з.

+ 2. Исследовать на выпуклость, непрерывность, полунепрерывность снизу и слабую полунепрерывность снизу функционалы:

Задача 1 м.б. решена так: $x^4=(x^2)^2$ $1/x^2=(1/x)^2$ ⇐ 1.2 Док-ть Т.: $f(g(x))$ – вып., если $\begin{cases} f, g \text{ – вып.} \\ f \text{ мон. неуб. на обл. знач-й } g \end{cases}$

$$J_2(u) = \left(\int_a^b u(t)\,dt \right)^4 \quad \text{в пространстве } L^2(a, b);$$

$$J_3(x) = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n-1}^2}, \qquad \text{и } J_5(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{2n-1}}{2n-1} \right)^{x} \quad \text{в пространстве } l^2.$$

или без $\sqrt{\ }$

или составить 2

3* $J(u)=\int_0^1\left(\int_0^t u(s)\,ds\right)^2 dt$ д-ть слабую непр-ть в $L^2(0,1)$